ESTIMATIVA DE PARAMETROS e CALIBRAÇÃO

Suponha uma população que está na fase de crescimento exponencial.

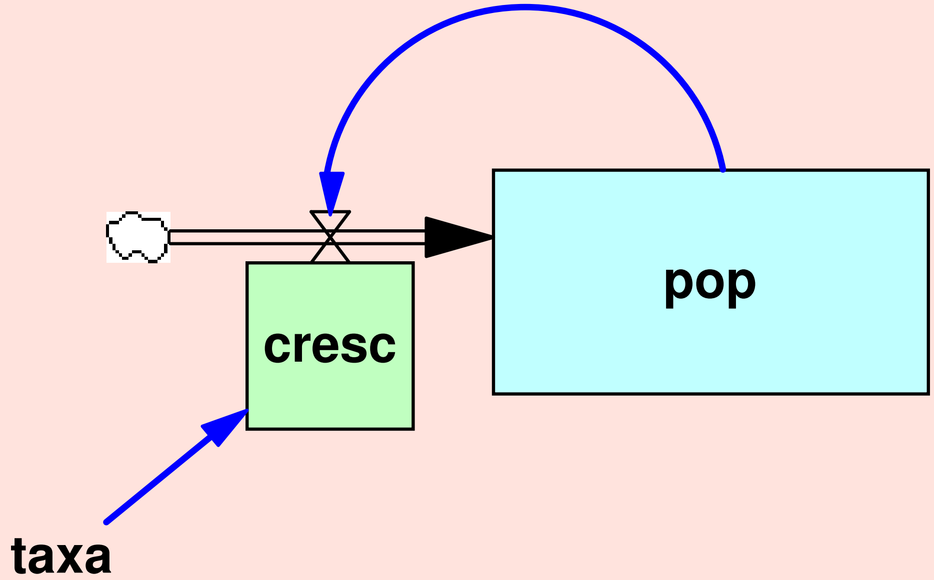
Existem avaliações do tamanho real desta população em vários instantes no tempo:

Semana	0	1	2	3	4	5	6
População	55	59	64	66	74	74	77

PROBLEMA

Como estimar a taxa de crescimento ?

Modelo:



$$POP_{t+\Delta t} = POP_t + \Delta t \times \left(POP_t \times taxa \right)$$

Isolando taxa:

$$taxa = \frac{POP_{t+\Delta t} - POP_t}{POP_t \times \Delta t}$$

Ricardo Sgrillo CEPEC/CEPLAC (www.sgrillo.net)

Estimativa da taxa

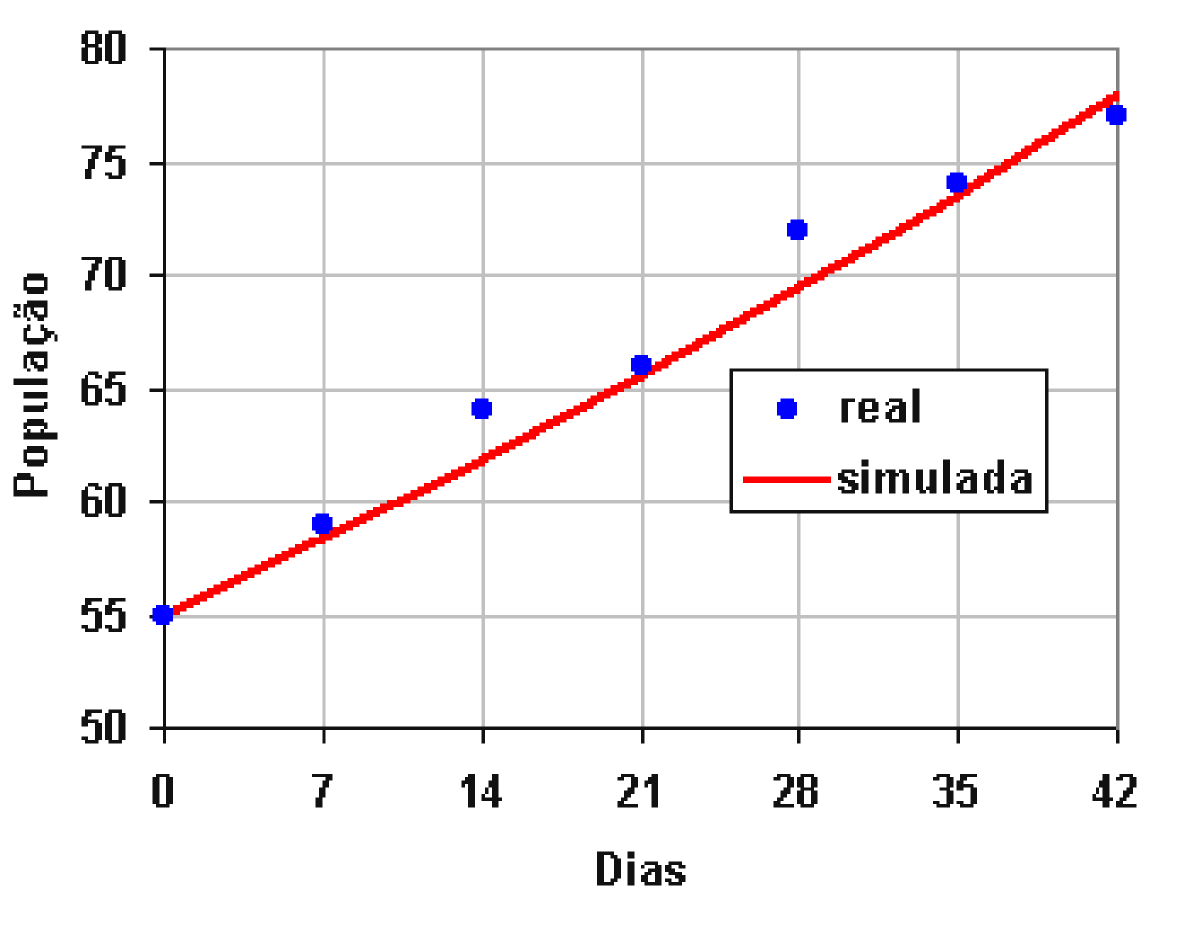
t (dias)	pop	estimativa	valor
0	55		
7	59	(59-55)/(7*55)	0.010390
14	64	(64-59)/(7*59)	0.012107
21	66	(66-64)/(7*64)	0.004464
28	72	(72-66)/(7*66)	0.012987
35	74	(74-72)/(7*72)	0.003968
42	77	(77-74)/(7*74)	0.005792
		Média	0.008285

Resultados da simulação 1:

T	Real	Sim
0	55	55.00
7	59	58.28
14	64	61.76
21	66	65.45
28	72	69.36
35	74	73.50
42	77	77.89

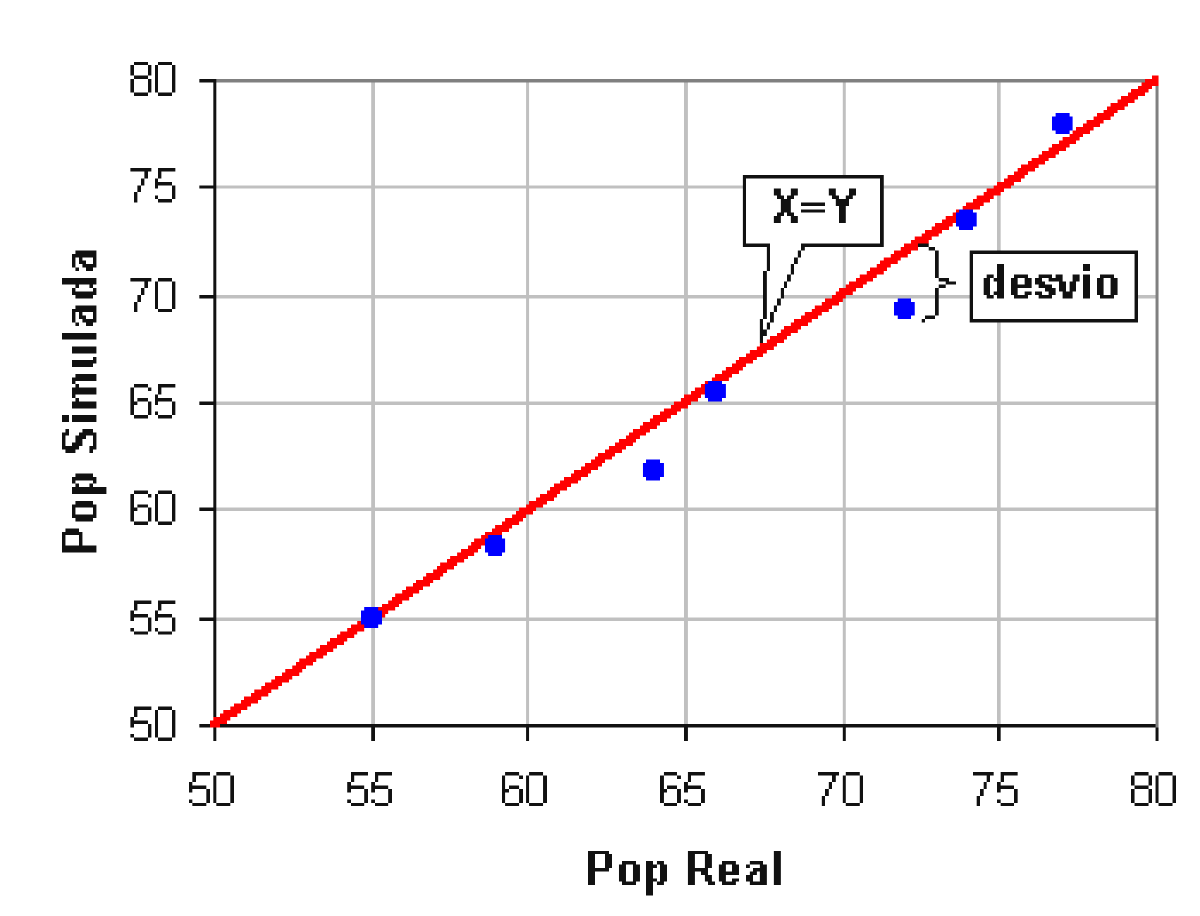
Resultados gráficos

Gráfico 1



Ricardo Sgrillo CEPEC/CEPLAC (www.sgrillo.net)

Gráfico 2



Examinando os gráficos, as simulações parecem produzir valores tendenciosos, consistentemente acima dos valores reais.

Isto porque as taxas de crescimento foram consideradas como constantes, entre duas medidas consecutivas (7 dias). Na realidade isto não é verdade, e a estimativa deve ser calibrada para melhorar os resultados da simulação.

Ricardo Sgrillo CEPEC/CEPLAC (www.sgrillo.net)

Critérios para o melhor ajuste

- **Através do gráfico 2 se percebe que o melhor ajuste deve ocorrer quando os desvios (diferenças entre os valores reais e simulados) forem os menores possíveis.**
- **Basicamente existem dois critérios para se determinar o que é *menores possíveis*.**
- $\Sigma |X_i - Y_i|$ **= mínimo (todos os desvios têm o mesmo peso)**
- $\Sigma (X_i - Y_i)^2$ **= mínimo (desvios maiores têm peso maior)**
- **Normalmente o segundo critério é o mais usado tem tratamento matemático mais simples. A expressão é chamada de Soma dos Quadrados dos Desvios ou SQ**

Ajustando a estimativa

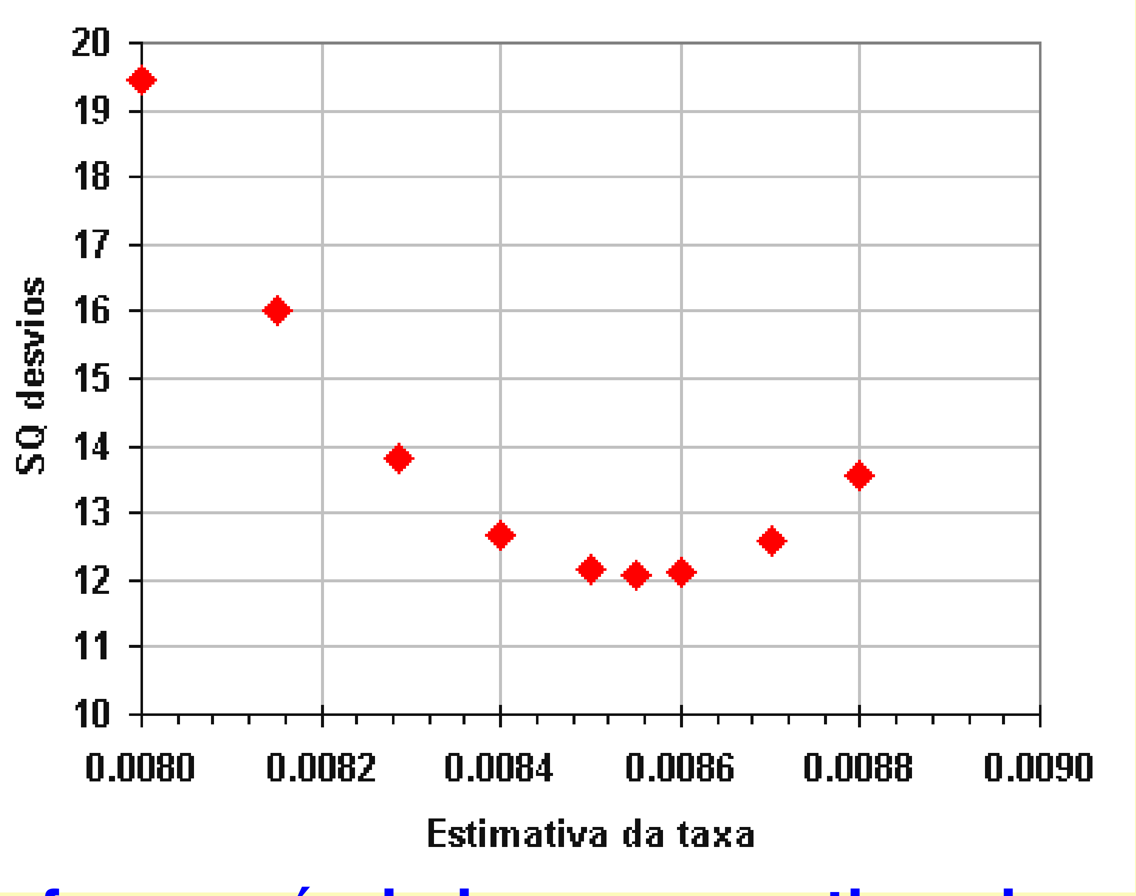
Modificar o valor da taxa, executar uma simulação e calcular a SQ dos desvios. Repetir esse processo para varias taxas, buscando o valor onde a SQ é menor.

T	Real	Sim1	SQ1	Sim2	SQ2	Sim3	SQ3
		0.008285		0.008500		0.008700	
0	55	55.00	0.0000	55.00	0.0000	55.00	0.0000
7	59	58.28	0.5184	58.37	0.3948	58.45	0.2987
14	64	61.76	5.0176	61.95	4.2023	62.12	3.5205
21	66	65.45	0.3025	65.75	0.0636	66.02	0.0006
28	72	69.36	6.9696	69.78	4.9358	70.17	3.3485
35	74	73.50	0.2500	74.06	0.0031	74.58	0.3318
42	77	77.89	0.7921	78.60	2.5466	79.26	5.1016
		Total	13.8502		12.1463		12.6018

Todos valores obtidos com as simulação:

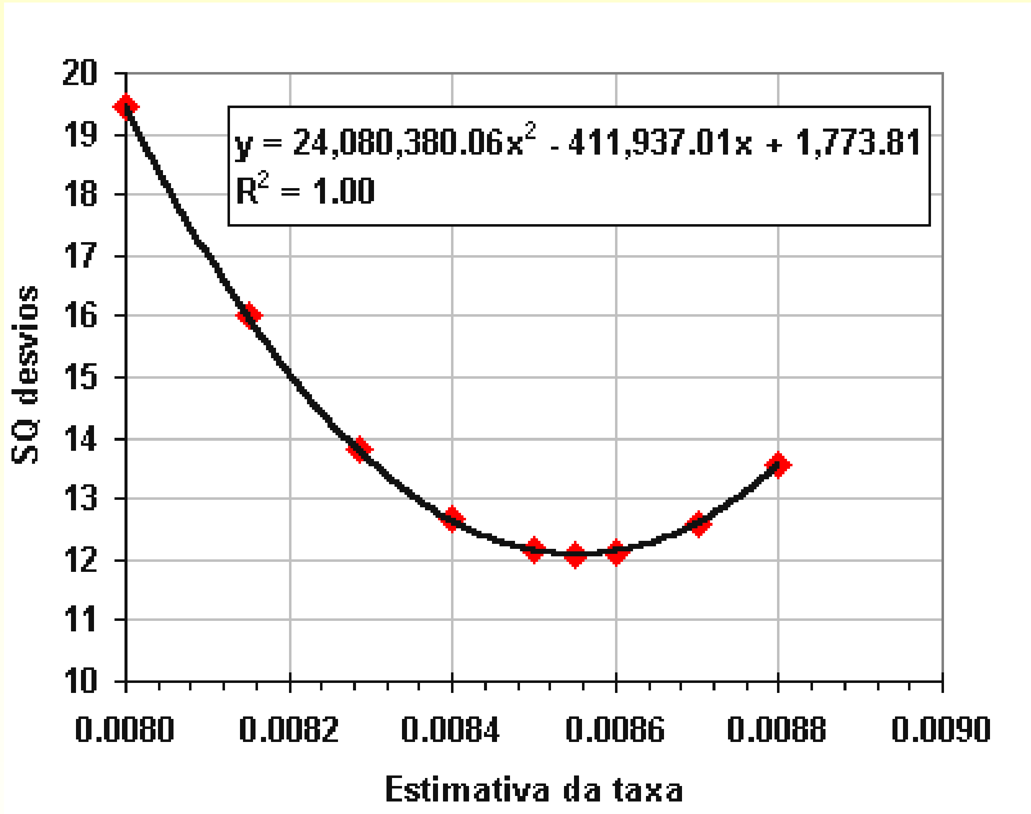
Estimativa	SQ
0.008000	19.44989
0.008150	16.00735
0.008285	13.83457
0.008400	12.65588
0.008500	12.14838
0.008550	12.07646
0.008600	12.12641
0.008700	12.59603
0.008800	13.56221

Analisar o gráfico para verificar a possibilidade de ajustar uma função matemática aos dados



Se não for possível, deve ser continuado o processo iterativo (solução numérica) até que o nível de precisão desejado da estimativa seja obtido.

No caso presente parece ser possível ajustar uma equação de segundo grau aos dados.



O ponto de mínimo da função vai corresponder a SQ mínima e, conseqüentemente, à melhor estimativa da taxa, considerando o critério utilizado.

O ponto de mínimo da função pode ser obtido analiticamente, igualando-se a derivada da função a zero.

Regras de diferenciação

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \text{.......... } \mathbf{1}$$

$$\frac{d}{dx}(cx) = c \qquad \text{.......... } \mathbf{2}$$

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1} \qquad \text{.......... } \mathbf{3}$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \ldots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \ldots \qquad \text{.......... } \mathbf{4}$$

Função para derivar: $y = 24,080,380.06x^2 - 411,937.01x + 1,773.81$

a. A derivada da função é a soma das derivadas parciais (regra 4)

b. A derivada da constante é zero (regra 1):

$$24,080,380.06x^2 - 411,937.01x + 0$$

c. A derivada da constante vezes X é a própria constante (regra 2)

$$24,080,380.06x^2 - 411,937.01$$

d. A derivada da potencia é dada pela regra 3

$$2 * 24,080,380.06 * x^{(2-1)} - 411,937.01$$

e. Igualar a derivada à zero e resolver para X:

$$2 * 24,080,380.06 * x^{(2-1)} - 411,937.01 = 0$$

$$X = 411,937.01 / (2 * 24,080,380.06)$$

$$X = 0.8553$$

EXERCICIO

Calibrar a taxa de infecção do modelo de Vassoura de Bruxa

Utilizar a produção real e a simulada como critério para a calibração